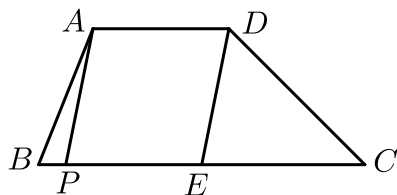


第2讲 四边形中的动点问题（练习）

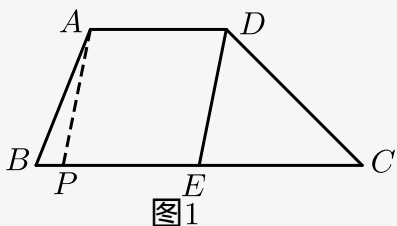
一、动点与四边形存在性综合

1. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 是 BC 的中点， $AD = 5$ ， $BC = 12$ ， $CD = 4\sqrt{2}$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，点 P 是 BC 边上一动点，设 PB 的长为 x ，当 x 的值为 _____ 或 _____ 时，以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形为平行四边形（答案请从小到大书写）。



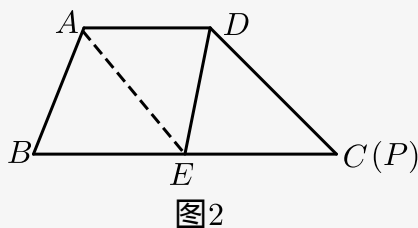
【答案】 1；11

【解析】 ①点 P 在 E 左边时，如图1。



此时 $AD = PE = 5$ ， $\because BE = CE = \frac{1}{2}BC = 6$ ，
 $\therefore BP = BE - PE = 1$ ， $\therefore x = 1$ 。

②点 P 在 E 右边时，如图2。



此时 $AD = PE = 5$ ， $\because BE = CE = \frac{1}{2}BC = 6$ ，
 $\therefore BP = BE + PE = 11$ ， $\therefore x = 11$ 。

故答案为：1；11。

【标注】 【知识点】 平行四边形的存在性

如图，边长为7的正方形OABC的顶点O在坐标原点处，点A、C分别在x轴、y轴的正半轴上，点E是OA边上的点（不与点A重合），EF⊥CE，且与正方形外角平分线AG交于点P。

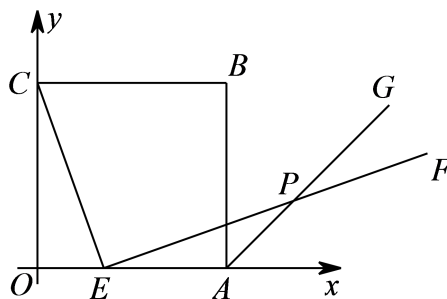


图1

(1) 求证： $CE = EP$ 。

(2) 若点E的坐标为(4, 0)，在y轴上是否存在点M，使得四边形BMEP是平行四边形？若存在，求出点M的坐标；若不存在，说明理由。

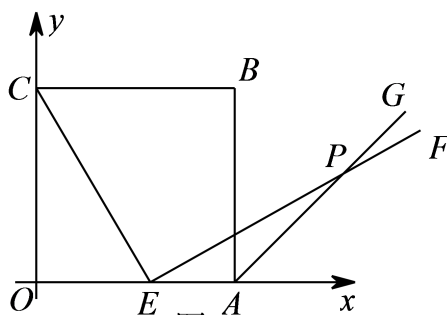


图2

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 存在，(0, 3)。

【解析】(1) 在OC上截取 $OK = OE$ ，连接EK，

$\because OC = OA, \angle 1 = 90^\circ, \angle OEK = \angle OKE = 45^\circ$,

$\because AP$ 为矩形外角平分线，

$\therefore \angle BAP = 45^\circ$,

$\therefore$

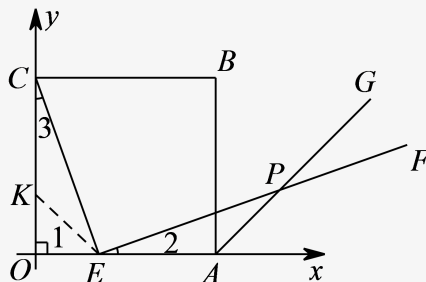


图1

$\angle EKC = \angle PAE = 135^\circ$ 。

$\therefore CK = EA$,

$$\therefore EC \perp EP,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \triangle EKC \cong \triangle PAE,$$

$$\therefore EC = EP.$$

(2) y 轴上存在点 M ,使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形,

如图,过点 B 作 $BM \parallel PE$ 交 y 轴于点 M ,

$$\therefore \angle 4 = \angle CEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 3,$$

在 $\triangle BCM$ 和 $\triangle COE$

中,

$$\begin{cases} \angle 5 = \angle 3 \\ BC = OC \\ \angle BCM = \angle COE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCM \cong \triangle COE,$$

$$\therefore BM = CE,$$

$$\text{而 } CE = EP,$$

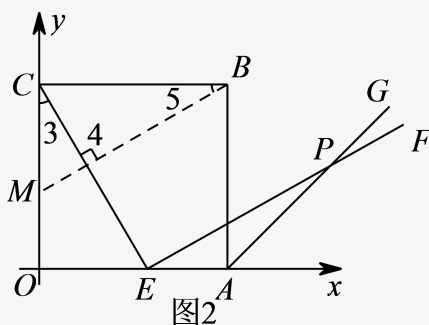
$$\therefore BM = EP. \text{ 由于 } BM \parallel EP,$$

$$\therefore \text{四边形 } BMEP \text{ 是平行四边形},$$

$$\text{由 } \triangle BCM \cong \triangle COE \text{ 可得 } CM = OE = 4,$$

$$\therefore OM = CO - CM = 3,$$

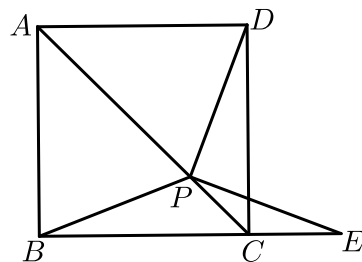
故点 M 的坐标为 $(0, 3)$.



【标注】【知识点】平行四边形的存在性

二、 四边形动点之最值问题

3. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上的一动点(包括点 A 、点 C),点 E 在直线 BC 上,且 $PE = PB$.



(1) 求证: $\triangle BCP \cong \triangle DCP$.

(2) 连接 DE ，求证： $\triangle DPE$ 为等腰直角三角形。

(3) 若 $AB = 2\sqrt{2}$ ，点 P 在 AC 上运动过程中，直接写出 $\triangle DPE$ 面积的最大值和最小值。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

(3) 最大值为4，最小值为2。

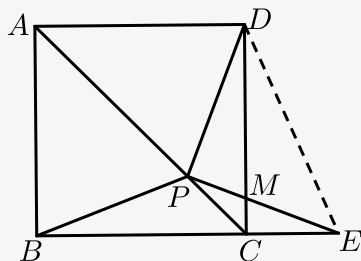
【解析】 (1) 在正方形 $ABCD$ 中， $BC = CD$ ， $\angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$ ，

在 $\triangle BCP$ 和 $\triangle DCP$ 中，

$$\begin{cases} BC = DC \\ \angle ACB = \angle ACD, \\ CP = CP \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCP \cong \triangle DCP$ (SAS)。

(2) 记 CD 与 PE 交点为 M 点，



$\therefore \triangle BCP \cong \triangle DCP$ ，

$\therefore \angle CDP = \angle CBP$ ， $PB = PD$ ，

$\therefore PE = PB$ ，

$\therefore \angle CBP = \angle E$ ， $PD = PE$ ，

$\therefore \angle CDP = \angle CEP$ ，

$\therefore \angle CDP + \angle DPE = \angle CEM + \angle DCE = \angle DME$ ，

$\therefore \angle DPE = \angle DCE = 90^\circ$ ，

又 $\therefore PD = PE$ ，

$\therefore \triangle DPE$ 为等腰直角三角形。

(3) $\therefore \triangle DPE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore S_{\triangle DPE} = \frac{1}{2} DP^2，$$

点 P 与点 A 或 C 重合时， DP 最大，三角形面积最大，

$PD \perp AC$ 时，即点 P 与正方形的中心重合时， PD 长度最短，三角形面积最小，

$$\therefore AB = 2\sqrt{2}，D到AC距离为 $2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ ，$$

$$\therefore \triangle DPE面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 = 4$ ，$$

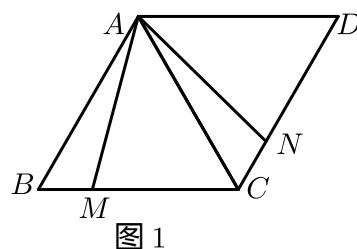
最小值为 $\frac{1}{2} \times 2^2 = 2$.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

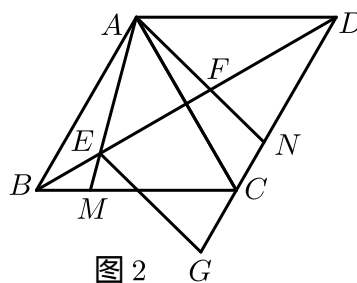
三、 四边形动点中之线段问题

4. 已知在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, M 、 N 分别是边 BC , CD 上的两个动点, $\angle MAN = 60^\circ$, AM 、 AN 分别交 BD 于 E 、 F 两点.

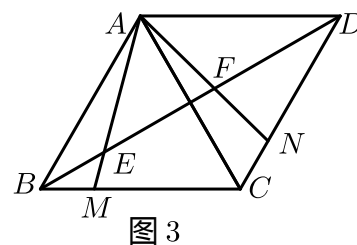
(1) 如图1, 求证: $CM + CN = BC$.



(2) 如图2, 过点 E 作 $EG \parallel AN$ 交 DC 延长线于点 G , 求证: $EG = EA$.



(3) 如图3, 若 $AB = 1$, $\angle AED = 45^\circ$, 直接写出 EF 的长.



【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) $EF = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

【解析】(1) 如图1中, 在 AC 上截取 CG , 使得 $CG = CM$.

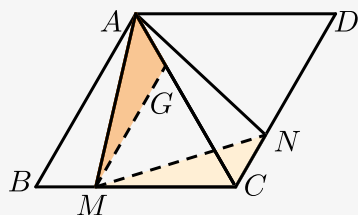


图 1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle ABC, \triangle ACD$ 都是等边三角形,
 $\therefore \angle BAC = \angle MAN = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BAM = \angle CAN$,
 $\because AB = AC, \angle B = \angle ACN = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle BAM \cong \triangle CAN$,
 $\therefore AM = AN$,
 $\because \angle MAN = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle AMN$ 是等边三角形,
 $\because CM = CG, \angle MCG = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle CMG$ 是等边三角形,
 $\therefore MA = MN, MG = MC$,
 $\because \angle AMN = \angle GMC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle AMG = \angle NMC$,
 $\therefore \triangle AMG \cong \triangle NMC$,
 $\therefore AG = CN$,
 $\therefore BC = AC = CG + AG = CM + CN$,
 即 $BC = CM + CN$.

(2) 如图2中, 连接 EC .

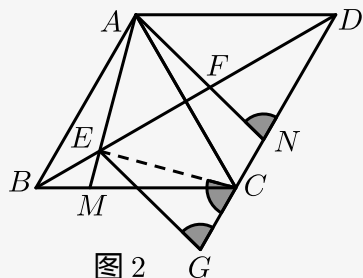


图 2

$\because BA = BC, \angle ABE = \angle CBE, BE = BE$,
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$,
 $\therefore AE = EC, \angle BAE = \angle BCE$,
 $\therefore EG \parallel AN$,

$$\therefore \angle G = \angle AND,$$

$$\therefore \angle AND = \angle CAN + \angle ACN = 60^\circ + \angle CAN, \angle ECG = 60^\circ + \angle ECB,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle BAE = \angle CAN,$$

$$\therefore \angle ECG = \angle AND = \angle G,$$

$$\therefore EC = EG,$$

$$\therefore EA = EG.$$

(3) 如图3中, 将 $\triangle ABE$ 绕点A逆时针旋转 120° 得到 $\triangle ADQ$,

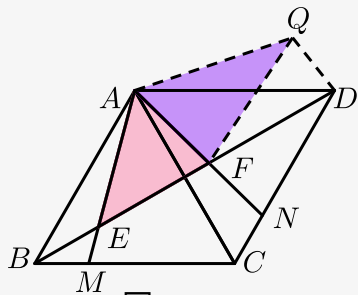


图 3

易证 $\triangle AFE \cong \triangle AFQ$,

$$\therefore \angle AEF = \angle AQF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AQD = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle FQD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QDF = \angle ADQ + \angle ADF = 60^\circ, \text{ 设 } DQ = BE = x,$$

$$\text{则 } DF = 2x, EF = FQ = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore AB = AD = 1, \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{3},$$

$$\therefore x + 2x + \sqrt{3}x = \sqrt{3},$$

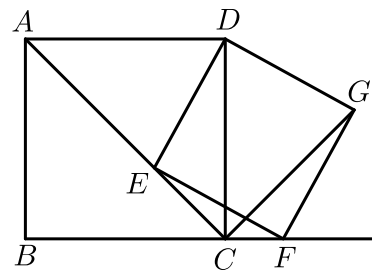
$$\therefore x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

$$\therefore EF = \sqrt{3}x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

四、 四边形动点之路径问题

5. 如图, 已知四边形ABCD为正方形, 点E为线段AC上一点, 连接DE, 过点E作 $EF \perp DE$, 交射线BC于点F, 以DE、EF为邻边作矩形DEFG, 连接CG.



(1) 求证：矩形 $DEFG$ 是正方形．

(2) 当点 E 从 A 点运动到 C 点时，

① 求证： $\angle DCG$ 的大小始终不变．

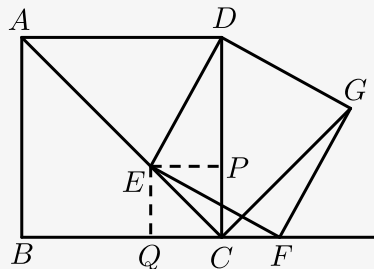
② 若正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则点 G 运动的路径长为 _____．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) ① 证明见解析．

② $2\sqrt{2}$

【解析】 (1) 作 $EP \perp CD$ 于 P ， $EQ \perp BC$ 于 Q ，



$$\because \angle DCA = \angle BCA = 45^\circ,$$

$$\therefore EQ = EP,$$

$$\because \angle QEF + \angle FEP = 90^\circ, \angle PED + \angle FEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QEF = \angle PED,$$

在 $\text{Rt}\triangle EQF$ 和 $\text{Rt}\triangle EPD$ 中，

$$\because \angle QEF = \angle PED, EQ = EP, \angle EQF = \angle EPD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle EQF \cong \text{Rt}\triangle EPD,$$

$$\therefore EF = ED,$$

$\therefore$ 矩形 $DEFG$ 是正方形．

(2) ① $\because$ 正方形 $ABCD$ 、 $DEFG$ ，

$$\therefore AD = CD, ED = GD,$$

$$\because \angle ADE + \angle EDC = 90^\circ, \angle CDG + \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDG,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$$\because AD = CD, \angle ADE = \angle CDG, ED = GD,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG,$$

$$\therefore \angle DCG = \angle EAD = 45^\circ,$$

$\therefore \angle DCG$ 的大小始终不变.

② $\therefore \angle DCG$ 的大小不变,

$\therefore$ 点 G 的运动轨迹是线段,

$$\because \triangle ADE \cong \triangle CDG,$$

$$\therefore CG = AE,$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2,

$$\therefore AC = 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 E 从 A 点运动到 C 点时, $AE = 2\sqrt{2},$

$$\therefore CG = AC = 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合